Semaine du 09/12 au 14/12.

1 Les suites réelles

1.1 Relations de comparaison

- On considère des suites qui ne s'annulent pas APCR.
- Suite négligeable devant une autre. Suite dominée par une autre. Notations de Landau.
- Opérations sur les O et les o. Suites équivalentes.
- $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne s'annulent pas APCR.
- Opérations sur les équivalents. Exemples. Contre-exemples. Équivalents et limites.
- Comparaison des suites usuelles : n^α, $(\ln n)^\beta$, k^n, $n!$ et n^n.
- Les équivalents usuels des suites du type $\sin(u_n)$, $1-\cos(u_n)$, $\tan(u_n)$, $e^{u_n}-1$, $\ln(1+u_n)$ et $(1+u_n)^\alpha - 1$ avec $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2 Espaces vectoriels

2.1 Définitions

- Définition d'un espace vectoriel $(E,+,.)$ sur $\mathbb{K}$, un corps commutatif. En pratique, on travaille en général avec $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Exemples. Importance de $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}^n$ possède une structure canonique de $\mathbb{K}$-ev.
- Règles de calcul dans un $\mathbb{K}$-ev.
- « Pseudo-intégrité » :E un $\mathbb{K}$-ev, $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda.x = 0_E$ alors $x = 0_E$ ou $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.
- Produit cartésien de $\mathbb{K}$-ev.
- $\mathcal{F}(X,E)$ possède une structure canonique de $\mathbb{K}$-ev si E est lui-même un $\mathbb{K}$-ev.

2.2 Sous-espaces vectoriels

- Définition d'une combinaison linéaire de deux vecteurs.
- Définition d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs.
- Définition d'une famille de scalaire à support fini. On dit aussi famille presque nulle de scalaires. Notation $\mathbb{K}^{(I)}$ pour une famille de scalaires à support fini.
- Définition d'une combinaison linéaire d'une famille (quelconque) de vecteurs. Exemple des fonctions polynomiales.
- Définition d'un sous-espace vectoriel. Un sev est un espace vectoriel pour les lois induites.
- Caractérisation d'un sev. Exemples fondamentaux.
- Droite vectorielle dirigée par un vecteur non nul.
- Un sev F d'un $\mathbb{K}$-ev E est stable par combinaisons linéaires d'éléments de F.
- L'intersection d'un nombre quelconque de sev d'un $\mathbb{K}$-ev E est un sev de E.
- Définition du sev engendré par une partie A de E. Notations $Vect(A)$.
- Si A est une partie de E, $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. Cas particulier où A est fini.
- Somme de deux sev de E. Généralisation à p sev.

2.3 Indépendance linéaire

➻ On dit que y est colinéaire à x s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.
➻ On dit que x et y sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.
➻ Caractérisation.
➻ Famille libre, famille liée. Partie libre, partie liée.
➻ Exemples pour des familles finies et familles infinies.
➻ Cas particulier de deux vecteurs : la famille $\mathcal{F} = (x, y)$ est libre ssi les vecteurs x et y ne sont pas colinéaires.
➻ Une famille est liée ssi on peut exprimer un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres.
➻ Familles et parties génératrices de l'espace E. D'un sev F de E.
➻ Définition d'une base. Coordonnées dans une base. Base canonique de $\mathbb{K}^n$.
➻ Géométriquement, on constate que dans $\mathbb{K}^2$, une famille libre de deux vecteurs est une base.

2.4 Applications linéaires

➻ Définition d'un morphisme, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme et d'un automorphisme.
➻ Notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$.
➻ Définition d'une forme linéaire. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. Cet ensemble est l'espace dual de E.
➻ Nombreux exemples d'applications linéaires.
➻ Image d'un combinaison linéaire de vecteurs par une application linéaire.
➻ La composée de deux applications linéaire est une application linéaire.

3 Prévisions

• Fin du chapitre.