

Semaine du 16/12 au 21/12.

1 Espaces vectoriels

1.1 Applications linéaires

- La composée de deux applications linéaire est une application linéaire.
- La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
- Image directe d'un sev, image réciproque d'un sev par une application linéaire. Noyau. Image.
- Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in L(E, F)$ alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i)_{i \in I})$.
- Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité en termes d'images d'une base (en supposant qu'il en existe une).
- Définition d'une application linéaire de façon unique en donnant l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

1.2 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
- Bilinéarité de l'application $(u, v) \mapsto u \circ v$ de $\mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$.
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif et non intègre en général.
- $(GL(E), \circ)$ est un groupe, c'est le groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.
- Définition d'une $\mathbb{K}$ -algèbres. Exemples. $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre.
- Sous-algèbre. Morphisme. Exemples.

1.3 Sommes directes

- Somme directe de 2 sev de E : deux définitions équivalentes. Caractérisation.
- Sev supplémentaires. Supplémentaire d'un sev. Exemples.
- Existence et unicité d'une application linéaire de E dans F connaissant une décomposition de E en somme directes ainsi que les restrictions à ces sev.
- Pour H un sev de E . On a les équivalences suivantes : il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$ ssi $H \neq E$ et pour tout $a \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}a$ ssi il existe D une droite vectorielle telle que $H \oplus D = E$ ssi H est un sev strict de E maximal pour l'inclusion. Dans ce cas on dit que H est un hyperplan de E .
- Deux formes linéaires toutes deux non nulles sont colinéaires ssi elles ont le même noyau (À refaire en pratique).

1.4 Projecteurs et symétries

- Projections associées à deux sev supplémentaires. Base et direction d'une projection.
- Propriétés élémentaires.
- Un projecteur est une application linéaire vérifiant $p \circ p = p$.
- Équivalence des deux notions. Décomposition de l'espace en somme directe de $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.
- Pour p un projecteur, $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.
- Définition d'une symétrie. Lien avec la projection.
- Caractérisation en tant qu'application linéaire telle que $s \circ s = \text{Id}_E$. Lien avec $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

2 Prévisions

- Vacances.
- Fonctions d'une variable réelle.

