Semaine du 06/01 au 11/01.

1 Fonctions d'une variable réelle

1.1 Généralités

- $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. D'autres opérations sur les fonctions : valeur absolue, min et max.
- L'ensemble des fonctions bornées sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
- Définition d'une propriété vraie au voisinage d'un réel a, de $\pm\infty$.
- Maximum, minimum, borne supérieure et borne inférieure pour une fonction (Rappels).
- Défintion d'une fonction monotone. Composition des fonctions monotones.
- Maximum local et minimum local. Propriété locale.
- Définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire.
- Théorème de décomposition en somme, parties paire et impaire d'une fonction (Rappel).
- Définition d'une fonction T-périodique sur une partie D de $\mathbb{R}$.
- Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto af(x)$ et $x \mapsto f(ax)$.

1.2 Limites et continuité en un point

1.2.1 Définitions

On considère une fonction f définie de D dans $\mathbb{R}$ où D est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Définition de l'adhérence $\overline{D}$ de D et de l'intérieur $\overset{\circ}{D}$ de D. Pour l'adhérence, il y a deux notions : adhérence dans $\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Définitions (9 au total !) de la limite $b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ de f quand $x \to a \in \overline{D}\cup\{\pm\infty\}$.
- Unicité de la limite. Si f est définie en a alors la limite, si elle existe, est égale à $f(a)$.
- Définition de la continuité de f en $a \in D$.
- Limite et restriction. Continuité et restriction. Caractère local de la limite, de la continuité.
- Limites à droite d'un point a tel que $a \in \overline{D\cap]a,+\infty[}$ et à gauche d'un point a tel que $a \in \overline{D\cap]-\infty,a[}$.
- Limite épointée.
- Continuité à droite et à gauche.
- L'existence d'une limite implique l'existence de la limite à droite et à gauche.
- Si $f(a+0)=f(a-0)=f(a)$ alors f est continue en a et réciproquement.
- De même, si f est continue à droite et à gauche en a alors f est continue en a.

1.2.2 Propriétés

- Composition de la limite d'une fonction et d'une suite.
- Utilisation des suites pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Corollaire : suites récurrentes et point fixe.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Composition des limites.
- Prolongement par continuité en $a \in \overline{D}\setminus D$. Unicité.

1.2.3 Limites et inégalités

- Si f possède une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.
- Si f possède une limite finie l en a et si $k < l < k'$ alors $k < f(x) < k'$ au voisinage de a.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorèmes de majoration, d'encadrement pour des limites finies.
- Théorèmes de majoration et de minoration pour des limites infinies.

1.2.4 Opérations algébriques sur les limites

- Toutes les opérations usuelles sur les limites finies.
- Corollaire : opérations usuelles sur les fonctions continues.
- Extension à des limites infinies quand c'est possible.
- Extension des résultats à des limites à droite, à gauche et épointées.
- Théorème de la limite monotone. On a un résultat aux deux bornes.

2 Prévisions

• Fin du chapitre.