Semaine du 13/01 au 18/01.

1 Fonctions d'une variable réelle

1.1 Propriétés globales

1.1.1 Continuité sur un intervalle

I désigne un intervalle non trivial.

- Définition de la continuité sur I tout entier. Notation $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
- Opérations sur les fonctions continues. Composition.
- $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
- Continuité des fonctions polynomiales, des fonctions rationnelles.
- Restriction à un intervalle $J \subset I$ d'une fonction continue.
- Prolongement par continuité en $a \in I$ d'une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

1.1.2 Théorèmes des valeurs intermédiaires

- Théorème des valeurs intermédiaires [1].
- Corollaire : une fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ possède un point fixe.
- Corollaire : une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas garde un signe constant.

1.1.3 Continuité sur un segment

- Fonction uniformément continue.
- Théorème de Heine.
- Théorème des bornes atteintes : sur un segment [2] une fonction continue est bornée et atteint ses bornes.
- Théorème de « compacité » : l'image par une fonction continue d'un segment est un segment.

1.1.4 Théorème de la bijection

- Une fonction injective et continue sur un intervalle est strictement monotone.
- Théorème de la bijection continue.
- Rappel : nous avons vu, au début de l'année, de nombreuses utilisations de ce théorème pour l'étude et la construction des fonctions usuelles.

1.1.5 Fonctions lipschitziennes

- Définition. Fonction contractante.
- Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
- Exemples. Contre-exemples.
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est telle que $f_{|_{[a,c]}}$ est k_1-lipschitzienne et $f_{|_{[c,b]}}$ est k_2-lipschitzienne alors f est $\max(k_1,k_2)$-lipschitzienne.
- Composée de fonctions lipschitziennes.
- Théorème du point fixe pour $f : [a,b] \to [a,b]$ contractante.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Dimension d'un espace vectoriel

- Définition d'un ev de dim finie : il existe une famille finie génératrice. Exemples.
- On considère une famille libre $\mathcal{L}$ et une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ d'un $\mathbb{K}$-ev E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}.$$
- Théorème de la base extraite : D'une famille génératrice finie, on peut extraire une base de l'espace vectoriel.
- Un espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base finie.

1. Trois versions !
2. Un segment est un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. Autrement dit un segment est un intervalle fermé et borné.

➻ Théorème de la base incomplète.
➻ Lemme technique : Si $\mathcal{F}$ est une famille de $(n+1)$ vecteurs qui sont combinaison linéaire d'une famille $\mathcal{G}$ de n vecteurs alors $\mathcal{F}$ est liée.
➻ Définition de la dimension d'un ev de dimension finie. Exemples.
➻ Soit E est de dimension finie n. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de p vecteurs alors $p \leqslant n$. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de q vecteurs alors $q \geqslant n$. Contraposées de ces résultats.
➻ Si $\mathcal{B}$ est une famille de p vecteurs de E, un espace vectoriel de dimension n, alors

$$\mathcal{B} \text{ est une base} \iff \mathcal{B} \text{ est libre } \textbf{et } p = n \iff \mathcal{B} \text{ est génératrice } \textbf{et } p = n$$

➻ Caractérisation d'un ev de dim ∞ : il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(u_1, ..., u_n)$ est libre.

2.2 Opérations sur les espaces vectoriels

➻ Dimension d'un sev F d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On a $\dim(F) \leqslant n$ et égalité ssi $E = F$.
➻ Exemples des sev de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$.
➻ Existence de supplémentaires pour les sev de E si E est de dimension finie.
➻ Dimension et somme directe de deux sev. Obtention d'une base de l'espace à partir de la concaténation de deux bases des sev supplémentaires. Conséquences sur la somme des dimensions.
➻ Soient E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque ainsi que F et G deux sev de E de dimension finie. Dans ce cas $F + G$ est de dimension finie et on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

➻ Soient E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sev de E tels que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Dans ce cas,

$$E = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\} \iff F + G = E.$$

➻ Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels de dimension finie.
➻ Génération d'un sev : rang d'une famille finie de vecteurs. Caractérisation en termes de sous-famille libre maximale.

2.3 Applications linéaires en dimension finie

➻ Quelques rappels. En particulier, la donnée de l'image d'une base définit une unique application linéaire et caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité en termes d'image d'une base $\mathcal{B}$.
➻ Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils sont de même dimension.
➻ S'il existe un isomorphisme de E dans F avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie alors F est nécessairement de dimension finie et de même dimension que E.
➻ Soient E et F de même dimension et $u \in L(E, F)$. Dans ce cas u est injectif ssi u est surjectif ssi u est bijectif.
➻ Définition du rang d'une application linéaire.
➻ Théorème du rang géométrique : Soit $f \in L(E, F)$ et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ (on suppose qu'il en existe au moins un). Dans ce cas f induit un isomorphisme de S dans $\operatorname{Im} f$.
➻ Théorème du rang : Soit E de dimension finie et $u \in L(E, F)$. On a $\dim(Ker(u)) + \operatorname{rg}(u) = \dim(E)$.
➻ Soit $f \in L(E)$ avec E de dimension finie. On a f inversible ssi f inversible à droite ssi f inversible à gauche.
➻ Le rang est inchangé par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

3 Prévisions

• Fin du chapitre.
• Matrices.