Semaine du 10/02 au 15/02.

1 Exercices sur la dérivation

2 Les polynômes

2.1 Algèbre $\mathbb{K}[X]$

- Définition de $\mathbb{K}[X]$. Produit de convolution.
- Définitions de $\mathbb{1}$ et X.
- Commutativité du produit, bilinéarité et associativité.
- $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.
- Expression de X^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Notation sous forme d'une combinaison linéaire des X^k. Base canonique de $\mathbb{K}[X]$.
- Définition d'un monôme et d'un polynôme constant.
- $\lambda \mapsto \lambda.1$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}[X]$ est un morphisme d'algèbres injectif.

2.2 Propriétés des polynômes

- Degré d'un polynôme. Définitions du coefficient dominant et d'un polynôme unitaire.
- Degré d'une somme, d'un produit.
- Définition de $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$. C'est un sev de $\mathbb{K}[X]$. Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre.
- Les éléments inversibles de cet anneau sont les polynômes de degré 0 c'est à dire les polynômes constants **et** non nuls.
- Application : toute famille de polynômes tous non nuls de degrés deux à deux distincts est libre. Famille échelonnée en degré.

2.3 Substitution

- Substitution par un élément de $\mathbb{K}$. Fonction polynomiale $\tilde{P}$ associée.
- L'application $\delta_a : P \mapsto P(a)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}$ est un morphisme d'algèbres.
- L'application $P \mapsto \tilde{P}$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est un morphisme d'algèbres.
- Généralisation au cas d'une $\mathbb{K}$-algèbre.
- Exemples de $\mathcal{L}(E)$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Algorithme de Horner.
- Composition des polynômes. Relation avec le degré. Parité d'un polynôme. Caractérisations.

2.4 Divisibilité

- Définition. Propriétés élémentaires. Polynômes associés.
- Division euclidienne. Algorithme.

2.5 Racines d'un polynôme

- Définition. α est une racine de P ssi $(X - \alpha) \mid P$.
- Si α_1,...,α_n sont des racines **distinctes** alors $\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \mid P$.

➳ Un polynôme de degré inférieur à n et non nul possède au maximum n racines distinctes. Un polynôme de degré inférieur à n qui possède $(n+1)$ racines est nul. Un polynôme qui possède une infinité de racines est nul.
➳ **Application :** si $\mathbb{K}$ est infini alors l'application $P \mapsto \tilde{P}$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ est un morphisme d'algèbres **injectif**.
➳ Intégrité de l'anneau des fonctions polynomiales sur un tel corps.
➳ Généralisation au cas où deux fonctions polynomiales coïncident en un nombre infini de valeurs.

2.6 Interpolation de Lagrange

➳ Le théorème avec unicité en imposant une condition sur le degré. Expression.
➳ Cas général sans imposer de condition sur le degré.

2.7 Racines multiples

➳ Définition d'une racine d'ordre au moins r pour P éventuellement nul.
➳ Ordre de multiplicité d'une racine pour $P \neq 0$. Cas de l'ordre 0.
➳ Extension des résultats précédents.

2.8 Relation coefficients/racines

➳ Fonctions symétriques élémentaires σ_i. Relation avec les coefficients du polynôme.
➳ Toute expression polynomiale symétrique en les racines d'un polynôme peut s'exprimer de façon polynomiale en fonction des fonctions symétriques élémentaires des racines de ce polynôme (Admis).

3 Prévisions

• Vacances.
• En route vers la Pale-co !