

Semaine du 10/03 au 15/03.

1 Les polynômes

1.1 Dérivation

- Définition. Relation avec le degré. Linéarité.
- Dérivation d'un produit, d'une composée.
- Dérivée $n^{\text{ème}}$. Formule de LEIBNIZ.
- Formule de TAYLOR. Relation avec les racines multiples.

1.2 Arithmétique des polynômes

- Définition d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
- Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est engendré par un unique polynôme P unitaire ou nul.
- A partir du résultat précédent, on montre exactement les mêmes propriétés que pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.
- Invariance du PGCD et du PPCM par changement de corps.

1.3 Polynômes irréductibles

- Définition. Caractérisation.
- Cas des polynômes de degré 1. Cas des polynômes de degré 2 et 3 en lien avec l'existence d'une racine.
- Valuation P -adique pour un polynôme P irréductible unitaire. Décomposition en produit d'irréductibles.

1.4 Cas de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

- Théorème de D'ALEMBERT - GAUSS. (Démonstration uniquement pour les volontaires)
- Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Conséquence sur la décomposition en produit d'irréductibles.
- Conjugué d'un polynôme.
- Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Conséquence sur la décomposition en produit d'irréductibles.

2 Intégration

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

- Définition d'une subdivision de $[a, b]$. Subdivision à pas constant. Subdivision plus fine qu'une autre.
- Fonction en escalier.
- Algèbre des fonctions en escalier.
- Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs. En particulier, elle est bornée.
- Intégrale d'une fonction en escalier. L'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie. Notation $\int_{[a,b]} f$.
- Propriétés usuelles de l'intégrale d'une fonction en escalier.

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux (cpm)

- Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
- Une fonction cpm est bornée.
- L'ensemble des fonctions cpm est une algèbre.
- $\|\cdot\|_{\infty}$ d'une fonction bornée. Propriétés usuelles.
- Théorème d'approximation d'une fonction cpm par une fonction en escalier sur un segment à ε près.
- Il existe une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f avec f cpm.
- Construction de l'intégrale d'une fonction cpm : On montre que pour toute suite (φ_n) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f , la suite des intégrales de φ_n converge vers un réel L qui ne dépend que de L .
- Valeur moyenne.

2.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction cpm

- Linéarité de l'intégrale, relation de CHASLES, inégalité triangulaire, positivité et croissance.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- « Le théorème utile »¹ : Si f est continue et de signe constant sur un segment non trivial $[a, b]$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$ alors $f = 0$.
- Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas de deux fonctions continues.
- Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on note

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

la somme de RIEMANN associée.

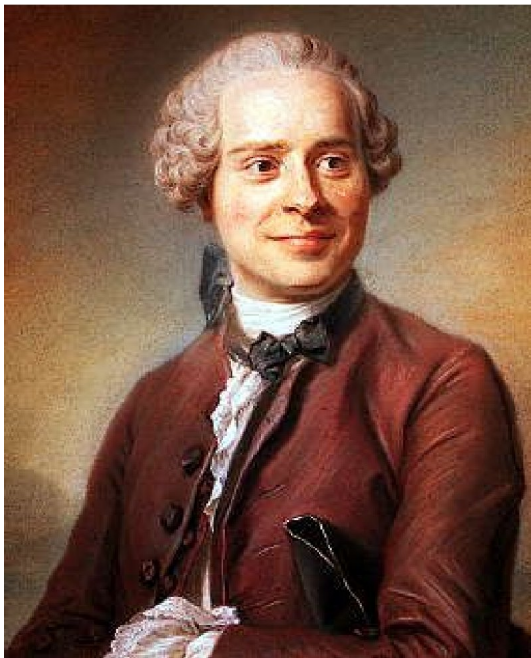
- On a

$$R_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{[a,b]} f.$$

- Majoration de l'erreur dans le cas d'une fonction lipschitzienne. D'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Fonction continue par morceaux sur un intervalle.
- Notation $\int_a^b f(t)dt$ pour a et b quelconques.
- Extension des résultats du paragraphe précédent. Attention aux inégalités !

3 Prévisions

- Intégration et dérivation.



Jean LE ROND D'ALEMBERT (1717 - 1783)



Johann Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855)

1. Nom non officiel !