

Semaine du 28/04 au 03/05.

1 Déterminants

➤ $\mathbb{K}$ un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$ et E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Formes n-linéaires alternées

- Formes p-linéaires. Structure de l'ensemble des formes p-linéaires.
- Écriture dans une base de $f(u_1, \dots, u_p)$ pour f p-linéaire.
- Formes n-linéaires alternées. Formes n-linéaires antisymétriques. Équivalence des 2 notions.
- Comportement d'une forme n-linéaire alternée avec une permutation.
- Écriture dans une base de $f(u_1, \dots, u_n)$ pour f n-linéaire alternée.
- Théorème fondamental : l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension 1.

1.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

- Déterminant dans une base $\mathcal{B}$ d'une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs. Notation $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- Expression de $\det_{\mathcal{B}}$ dans le cas général. Expression dans le cas $n = 2$ et $n = 3$ (Règle de Sarrus).
- Relation de CHASLES.
- Caractérisation des bases.

1.2.1 Déterminant d'un endomorphisme

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique scalaire noté $\det(f)$ tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs, $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$. En particulier $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$.
- Soient f et g deux endomorphismes et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$ et $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f bijective ssi $\det(f) \neq 0$.
- Morphisme de groupes $\det : (GL(E), \circ) \rightarrow (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$. Ce morphisme est surjectif.

1.2.2 Déterminant d'une matrice carrée

- Définition : c'est le déterminant dans la base canonique des vecteurs colonnes.
- Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une forme n-linéaire alternée en les colonnes.
- Expression de $\det A$ en fonction des coefficients.
- $\mathcal{B}$ une base quelconque et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E . On a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$.
- $\mathcal{B}$ une base quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$, $\det(f) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(f))$.
- $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(BA)$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.
- Morphisme de groupes $\det : (GL_n(\mathbb{K}), \circ) \rightarrow (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$. Ce morphisme est surjectif.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant. Le déterminant est donc un invariant de similitude.
- $\det(A) = \det(A^T)$. Ainsi $A \mapsto \det(A)$ est n-linéaire alternée en les lignes.

1.3 Calcul effectif d'un déterminant

⇒ En pratique, on se ramène au calcul du déterminant d'une matrice.

1.3.1 Opération sur les lignes et les colonnes

- Effet sur le déterminant.
- Déterminant d'une matrice diagonale.
- Lemme : $\det \begin{pmatrix} & & 0 \\ & A' & \vdots \\ & & 0 \\ * & * & * & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \det(A')$.
- Déterminant d'une matrice triangulaire.

- Mineur d'ordre $(n - 1)$. Cofacteur.
- Développement suivant la $j^{\text{ième}}$ colonne, la $i^{\text{ième}}$ ligne.
- Comatrice. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\text{com}(A)^T A = \det(A)I_n \text{ et } A \text{com}(A)^T = \det(A)I_n.$$

- Formule de l'inverse.

1.3.2 Déterminants particuliers

- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Déterminant d'une matrice diagonale par blocs !
- Déterminant de VANDERMONDE¹

1.4 Compléments (Officiellement HP)

- Un mot sur le nombre de multiplications nécessaires pour calculer un déterminant suivant 3 méthodes. Conclusion : vive GAUSS et son pivot !!
- Mineur d'ordre r . S'il existe un mineur d'ordre r non nul alors A est au moins de rang r . Réciproque. Il s'agit d'une traduction en termes de déterminants et de mineurs de propriétés déjà démontrées.
- Formules de Cramer .
- Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.
- Toute matrice A de $GL_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire sous la forme $A = T_1 \cdots T_p D(\det(A)) T'_q \cdots T'_1$ où T_i et T'_j sont des transvections et $D(\alpha)$ est la matrice $I_n + (\alpha - 1)E_{n,n}$. On peut même prendre $p = 0$ ou $q = 0$...

2 Prévisions

- Vacances !
- Géométrie affine.

1. Alexandre Vandermonde, né à Paris le 28 février 1735 et mort à Paris le 1er janvier 1796, est un mathématicien français.