

Semaine du 19/05 au 24/05.

1 Dénombrement

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \llbracket 1, n \rrbracket$.

- CNS existence injection (resp. surjection, resp. bijection) de E_n dans E_p .
- Définition de la finitude pour un ensemble. Définition du cardinal d'un ensemble. Cas de $\emptyset$.
- E et F deux ensembles finis. CNS d'existence d'une injection / surjection / bijection de E dans F .
- E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \rightarrow F$. Alors,

$$f \text{ surjective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ bijective.}$$

- E un ensemble fini alors $E' \subset E$ est fini et $\text{Card}(E') \leq \text{Card}(E)$ avec égalité ssi $E = E'$.
- E un ensemble. A et B deux parties finies de E . Dans ce cas $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

- Généralisation dans le cas de parties finies, 2 à 2 disjointes, d'un même ensemble.
- Inégalité dans le cas général. La formule du crible est HP.
- Lemme des bergers.
- E et F deux ensembles finis. Alors $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E)\text{Card}(F)$. Généralisation à n ensembles.
- E et F deux ensembles finis. Alors $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ est fini de cardinal $(\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$.
- E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal $2^{\text{Card}(E)}$.
- Définition des arrangements : A_n^p est le nombre d'injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. C'est aussi le nombre de p -uplets d'éléments distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- Expression dans le cas $0 \leq p \leq n$: $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
- Définition des combinaisons : $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de E de cardinal p . Expression.
- Formule de PASCAL.

2 Probabilités sur un univers fini

2.1 Espace probabilisé

- Vocabulaire de base.
- Système complet d'événements.
- Définition d'une probabilité. Le couple (Ω, P) est appelé un *espace probabilisé* ou bien un *univers probabilisé*.
- Propriétés élémentaires. Croissance. Additivité finie
- Inégalité de Boole.
- Caractérisation d'une probabilité sur un univers fini.
- Probabilité uniforme.

2.2 Probabilité conditionnelle

- Définition. Notation $P(B|A)$ ou $P_A(B)$.
- P_A est une probabilité sur Ω .
- Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

2.3 Indépendance

- Définition de l'indépendance de deux événements.
- Conséquence pour $A, \bar{A}, B$ et $\bar{B}$ si A et B sont indépendants.
- Indépendance deux à deux d'une famille d'événements
- Indépendance (mutuelle) d'une famille d'événements
- Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille finie d'événements indépendants pour la probabilité P . Dans ce cas, la famille $(B_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, B_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$ est aussi une famille d'événements indépendants.
- Soient $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille finie d'événements indépendants pour la probabilité P et $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p < n$.

Dans ce cas, les événements $\bigcap_{i=1}^p A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^n A_i$ sont indépendants. Il en est de même des événements $\bigcup_{i=1}^p A_i$ et

$\bigcup_{i=p+1}^n A_i$, de $\bigcap_{i=1}^p A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^n A_i$, de $\bigcup_{i=1}^p A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^n A_i$

- Quelques mots sur la modélisation d'expériences aléatoires indépendantes.
- Définition d'une épreuve de BERNOULLI, d'un schéma de BERNOULLI.

3 Prévisions

- Variables aléatoires
- Fonctions de deux variables