

Semaine du 02/06 au 07/06.

1 Variables aléatoires

1.1 Définitions

- Définition d'une v.a. sur un espace probabilisé fini. Cas des v.a. réelles. Exemples. v.a. indicatrice. Notations usuelles.
- Opérations sur les v.a. réelles.
- Loi d'une v.a. La loi d'une v.a. ne la caractérise pas.

1.2 Espérance

- Définition. Propriétés : linéarité, positivité, croissance et inégalité triangulaire.
- Inégalité de MARKOV.

1.3 Espérance et variance

- Théorème de transfert.
- Définition de la variance. Propriétés élémentaires. Écart-type $\sigma(X)$.
- Définition de « être centrée réduite » pour une v.a. On note $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ la v.a.r. centrée réduite associée à X quand $V(X) \neq 0$.
- Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

1.4 Loi usuelles

- Loi uniforme sur un ensemble fini non vide. Loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$. Loi de BINOMIALE $\mathcal{B}(n, p)$ avec $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$.
- Calcul de l'espérance et de la variance dans les deux derniers cas.

1.5 Couples de v.a.

- Loi conjointe et lois marginales. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire. Généralisation à un n -uplet.

1.6 Indépendance de v.a.

- Indépendance de deux v.a. : définition et caractérisation. Cas des v.a. de BERNOULLI.
- Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ aussi pour toutes fonctions f et g .
- Indépendance (mutuelle) de n v.a. : définition et caractérisation.
- Toute sous-famille d'une famille de v.a. indépendantes est indépendante. En particulier, l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
- Lemme des coalitions.
- Somme de n v.a.r. (mutuellement) indépendantes suivant une même loi de BERNOULLI.

1.7 Covariance

- Définition. Expression.
- La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Variance d'une somme.
- « Indépendantes » $\Rightarrow$ « Non corrélées » mais la réciproque est fausse.
- Variance d'une somme de n v.a.r. deux à deux indépendantes.

2 Fonctions de plusieurs variables

2.1 Topologie

- On se place dans $\mathbb{R}^n$ et on utilise la norme euclidienne. Convergence d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Unicité de la limite. Adhérence d'une partie.
- Boule ouverte, boule fermée et sphère. Ouvert. Une boule ouverte est ouverte.
- Limite d'une fonction en un point adhérent. Unicité. Composition des limites.

2.2 Continuité

- Continuité en un point. Continuité globale. Caractère local de la continuité. Composition des fonctions continues. Structure de.
- L'ensemble $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^p)$ avec A une partie de $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On considère dans la suite $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- $\mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Quotient de telles fonctions. Exemples. Représentation graphique.
- Applications partielles.
- Si f est continue, les applications partielles sont continues. La réciproque est fausse.

2.3 Dérivation

- Dérivées partielles. Dérivée suivant un vecteur en un point.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Exemples.
- DL ordre 1 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|)$$

Démonstration admise cette année.

- Interprétation géométrique : plan tangent.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors elle est continue!
- Définition du gradient en $a \in \mathcal{U}$ pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$. Notation $\nabla f(a)$.
- Si f est $\mathcal{C}^1$, elle possède une dérivée en tout point suivant tout vecteur. Expression à l'aide du gradient.
- Le gradient de f en $a = (x_0, y_0)$ définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.
- Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = x'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

- Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$.

- Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f .
- Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$.

3 Prévisions



C'est déjà fini pour cette année !