Semaine du 18/11 au 23/11.

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

1.1 PGCD et PPCM de plusieurs entiers

- Associativité du pgcd et ppcm.
- Définitions du pgcd et ppcm de plusieurs entiers.
- Généralisation des propriétés vues pour deux entiers.

1.2 Nombres premiers

- Définition. Caractérisation.
- Propriétés élémentaires liés à la divisibilité.
- Existence d'un diviseur premier pour $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$.
- Il existe une infinité de nombres premiers.
- Crible d'Ératosthène.
- Valuation p-adique pour p un nombre premier. Cas de zéro.
- Caractérisation.
- Valuation p-adique d'un produit.
- Décomposition en produit de facteurs premiers (DFP) : Existence et unicité (Théorème fondamental de l'arithmétique).
- Critère de divisibilité en fonction des valuations p-adiques.
- Pgcd et ppcm en fonction des valuations p-adiques. On retrouve que pour $(a,b) \in {\mathbb{N}^*}^2$, $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.

1.3 Congruences

- Définition de $a \equiv b\ [n]$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
- La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
- Compatibilité avec les opérations.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalences. Il y a exactement n classes d'équivalences : $\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{(n-1)}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède une structure canonique d'anneau commutatif.
- Les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps ssi $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre ssi n est un nombre premier.
- Petit théorème de Fermat (Deux versions et deux démonstrations.).
- Théorème de Wilson.
- Critères de divisibilité en base 10.

2 Les réels

➻ La construction de $\mathbb{R}$ et les propriétés usuelles sont admises.

2.1 Valeur absolue

➻ Définition de la valeur absolue d'un réel. Distance entre deux réels.
➻ Propriétés élémentaires de la valeur absolue.
➻ Inégalités triangulaires : $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$. Cas d'égalité à droite.
➻ Deux inégalités classiques :

- $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ |ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$;
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ (x\geqslant -1) \Rightarrow (1+x)^n \geqslant 1+nx$.

➻ Définition de la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

2.2 Borne supérieure et inférieure

➻ Les notions suivantes ont déjà étés vues dans un chapitre précédent : majorant, minorant, plus petit (min) et plus grand (max) élément d'un ensemble.
➻ Définition de la borne supérieure et de la borne inférieure d'un ensemble.
➻ Si un ensemble A possède un plus grand élément alors c'est aussi la borne sup de A. Idem avec borne inférieure.
➻ Pour A une partie de $\mathbb{R}$, on définit $B=-A$. Lien entre $\sup(A)$ et $\inf(B)$.
➻ Caractérisation de la borne supérieure. Caractérisation de la borne inférieure.
➻ Théorème fondamental **(Admis)** : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.
➻ Corollaire : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée possède une borne inférieure.
➻ Définition de la borne sup d'une fonction f définie sur un ensemble X et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Caractérisation.

3 Prévisions

- Fin du chapitre.
- Suites réelles.